فصل ۵

عبارت‌های جبری

فعالیت

همان‌طور که می‌دانید به عبارت‌های جبری $\frac{۱}{۲}x^۳$ ، $۵x^۷$ و $-\sqrt{۳}a^۳x^۲$ یک جمله‌ای می‌گویند هر یک جمله‌ای از حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به‌دست می‌آید. یک جمله‌ای از دو قسمت ضریب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است. برای مثال در یک جمله‌ای $-\sqrt{۳}a^۳x^۲$ ، عدد $-\sqrt{۳}$ ضریب عددی و $a^۳x^۲$ عبارت حرفی است.

در عبارت‌های زیر، یک جمله‌ای‌ها را مشخص کنید.

$$\frac{x^۲y}{۵}\ ,۳^x\ ,\sqrt{x}\ ,\frac{۱}{x}$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارت‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود، مانند $۴x^۲y$ و $\frac{۷}{۲}x^۲y$ و $-۳x^۲y$.

۱ــ مانند نمونه حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $۲\times(-۴x\times۷x^۲) = ۲\times(-۲۸x^۳)=-۵۶x^۳$

۲) $(\frac{۲}{۳}x^۲y)^۳ = (\frac{۲}{۳})^۳\times(x^۲)^۳\times y^۳ = \frac{۸}{۲۷}x^۶y^۳$

۳) $(-۳x^۳)^۲(\frac{۱}{۳}x^۲)^۳ =$

۴) $(\frac{۱}{۲}a^۲b)(ab)(\frac{-۲}{۷}a^۲c^۵) =$

۵) $۲(۵xy^۴)^۲(-۲x^۵y^۲)=$

۶) $(۲x^۲y)(۳x^۲y^۳) + xy^۳(-۵x^۳y)=$

در یک جمله‌ای $۵a^۲x^۳y$، توان متغیر a برابر با ۲ است، بنابراین درجهٔ این یک جمله‌ای را نسبت به متغیر a، ۲ درنظر می‌گیریم. به همین ترتیب درجه نسبت به x و y به ترتیب ۳ و ۱ است. همچنین درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با ۵= ۳+۲ تعریف می‌کنیم.

۲ــ مانند نمونه، جدول زیر را کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به همهٔ متغیرها
$\sqrt{۳}a^{۳}x^{۲}y^{۴}$	a , x , y	۲	۴	۲+۴=۶	۳+۲+۴=۹
$۵x^{۲}y^{۲}z^{۴}$					
$-۱۲x^{۳}u$					
$\frac{۳}{۵}$					

یک جمله‌ای‌های $۳x^{۲}y^{۳}$ و $-۵x^{۳}y^{۲}$ را که متشابه نیستند، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم.

چنانچه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای باشد، مانند :

$$۴x^{۲}-۴x+۱\ ,\ x^{۲}-۲x\ ,\ \frac{۲}{۳}ax^{۲}y-\frac{۳}{۲}axy^{۲}-axy\ ,\ ۳x^{۴}$$

در سه جمله‌ای $-۲xy^{۳}+x^{۲}y-۱$، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم. در این مثال، درجه نسبت به x برابر با ۲ درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجهٔ جمله‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به y و x برابر با ۴ است.

معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳ــ مانند نمونه چند جمله‌ای‌های زیر را نسبت به متغیر x مرتب کنید.

الف) $۳x^{۲}+۵-۲x+۲x^{۳}=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۲x+۵$

ب) $-۳bxy^{۳}+ax^{۲}y-۴bx^{۳}y^{۲}$

ج) $\frac{۱}{۲}x^{۲}y^{۲}-۲xy^{۳}+۳x^{۳}y-۴$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده کرده، سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $x-[(y-x)-(y-۱)]=$

ب) $-5a^2-3ax+x^2-[4a^2+5ax-(3a^2-8ax)]=$

ج) $(5x^4-4x)(x^3-1)=$

د) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)=$

هـ) $(x^2-2x+1)(x^2+x-2)=$

فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده شده برای x، جدول زیر را کامل کنید.

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-2				
$-\frac{1}{2}$				
0				
1				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید، نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به‌دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2=x^2+6x+9$ یک اتحاد است.

آیا به نظر شما برابری $(x+4)^2=x^2+16$ یک اتحاد است؟ چرا؟

آیا به نظر شما برابری $\frac{x+1}{3}=x-1$ یک اتحاد است؟ این برابری به ازای چه مقداری از x برقرار

است؟ نام این برابری چیست؟

تفاوت بین اتحاد $(x+۱)^۲=x^۲+۲x+۱$ و معادلهٔ $x(x+۲)=x^۲-۲$ چیست؟

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید؟

الف) $(a+۴)^۲=(a+۴)(a+۴)=a^۲+۴a+۴a+۱۶=a^۲+۸a+۱۶$

ب) $(۵x+۲)^۲=(\quad+\quad)(\quad+\quad)=\quad+\quad+\quad+\quad=۲۵x^۲+۲۰x+۴$

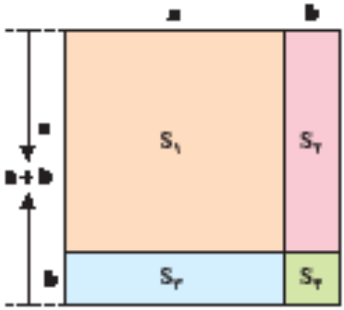
ج) $(۵x-۲)^۲=(\quad-\quad)(\quad-\quad)=\quad-\quad-\quad+\quad=۲۵x^۲-۲۰x+۴$

د) $(۳m-\quad)^۲=(\quad-۵n)(\quad-\quad)=\quad-\quad-\quad+\quad=۹m^۲-۳۰mn+۲۵m^۲$

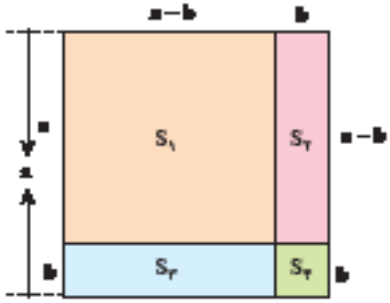
هـ) $(a+b)^۲=(\quad+\quad)(\quad+\quad)=\quad+\quad+\quad+\quad=a^۲+۲ab+b^۲$

و) $(a-b)^۲=(\quad-\quad)(\quad-\quad)=\quad-\quad-\quad+\quad=a^۲-۲ab+b^۲$

برابری‌های به‌دست آمده در «هـ» و «و» را به‌ترتیب به کمک مساحت شکل‌های ۱ و ۲ توضیح دهید.



$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$



$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۳ــ با دقت در برابری $(۵x+۲)^۲=۲۵x^۲+۲۰x+۴$ که در فعالیت ۲ به‌دست آمد، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

ــ جملهٔ اول سمت راست برابری یعنی $۲۵x^۲$ چه رابطه‌ای با $۵x$ دارد؟

ــ جمله دوم سمت راست برابری یعنی $۲۰x$ چه رابطه‌ای با ۲ و $۵x$ دارد؟

ــ جمله سوم سمت راست برابری یعنی ۴ چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟

عبارت جبری $۵x+۲$ دوجمله‌ای و $(۵x+۲)^۲$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم. برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$(۵x+۲)^۲=۵x^۲+۲\underbrace{(۵x)(۲)}_{\text{دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله}}+۲^۲$$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — مربع جملهٔ دوم

با توجه به برابری $(a+b)^۲ = a^۲+۲ab+b^۲$ و $(a-b)^۲= a^۲-۲ab+b^۲$ که در فعالیت ۲ به‌دست آوردیم، شباهت‌ها و تفاوت‌های این دو برابری را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a+b)^۲ = a^۲+۲ab+b^۲$$

$$(a-b)^۲= a^۲-۲ab+b^۲$$

کار در کلاس

۱ــ مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به دستور بالا به‌دست آورید.

الف) $(۲x+۱)^۲ =$

ب) $(۴a+۳b)^۲ =$

ج) $(x^۲ -\frac{۱}{۲})^۲ =$

د) $(۲xy -\frac{۱}{۲}x^۳)^۲ =$

۲ــ با توجه به نمونه، جاهای خالی را پُر کنید.

الف) $(\underbrace{\cdots}_{\text{جملهٔ اول}} + \underbrace{۳b^۲}_{\text{جملهٔ دوم}})^۲ = \underbrace{۴a^۲}_{\text{مربع جملهٔ اول}} + \underbrace{\cdots}_{\text{دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها}} + \underbrace{۹b^۴}_{\text{مربع جملهٔ دوم}}$

جمله اول $=۲a \Rightarrow (۲a)^۲=۴a^۲ =$ مربع جمله اول

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(۲a)(۳b^۲) = ۱۲ab^۲$

در نتیجه داریم :

الف) $(۲a+۳b^۲)^۲=۴a^۲+۱۲ab^۲+۹b^۴$

ب) $(۱+b)^۲=۱+ \dots +b^۲$

ج) $(xy-\frac{۱}{۲})^۲ =\cdots-\cdots+\frac{۱}{۴}$

د) $(\cdots-\cdots)^۲ = x^۴ -\cdots+\frac{۱}{x^۴} \quad (x\neq ۰)$

هـ) $(\dots-\dots)^۲=۳۶x^۲-۱۲xy+ \dots$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع در چند جمله‌ای‌ها را مطالعه کرده‌اید.

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب}} ab+ac$$

اکنون اگر برابری بالا را مانند زیر به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت بنویسیم، در این صورت دو جمله‌ای ab+ac را به حاصل‌ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم :

$$ab+ac \xrightarrow{\text{تجزیه}} a(b+c)$$

(ب.ع.م) بزرگ‌ترین عامل مشترک

مانند نمونه چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $8x^2+12x=4x\times 2x+4x\times 3$

$4x=$(ب.ع.م)

$=4x(2x+3)$ (با توجه به خاصیت بخشی)

ب) $6a^4-18a^3=$

ج) $7x^4-14x^3+21x^2$

د) $5x^2y-10xy^2+15x^2y$

کار در کلاس

اکنون اگر اتحاد مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر بنویسیم، در این صورت سه جمله‌ای $a^2+2ab+b^2$ را به حاصل‌ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم :

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a+b)(a+b)$$

مانند نمونه، سه جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

در این سه جمله‌ای دو جملهٔ مربع کامل داریم که عبارت‌اند از x^2 و ۹. توجه کنید که جمله دیگر دو برابر حاصل‌ضرب جذر جملات مربع کامل است. پس با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌شود.

ب) $x^2-4x+4=(\quad-\quad)^2=(\quad-\quad)(\quad-\quad)$ $\quad 2(x)(3)$

ج) $n^4-10n^2+25=(\quad-\quad)^2=(\quad-\quad)(\quad-\quad)$

د) $4ax^2+12axy+9ay^2=a(4x^2+12xy+9y^2)=(\quad+\quad)^2$

$=(\quad+\quad)(\quad+\quad)$

$a=$(ب.ع.م)

تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

۱) $(-5m)^2(-2m)^3-(\frac{1}{2}m)^2(-2m)^3$

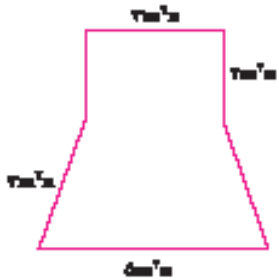
۲) $7a^3-4b^3+5c^3-(a^3-9b^3-11c^3)$

۳) $(x^m-1)(x^m-1)$

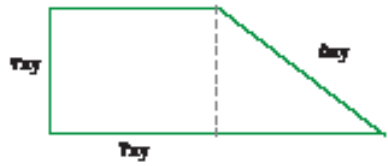
۴) $x-[(y-x)-(y-1)]$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

۱)



۲)



۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

۱) $(5y-3x)^2$

۲) $(-3a^2-a)^2$

۳) $(8x-\frac{1}{3})^2$

۴) $(2/7)^2+2(2/7)(3/3)+(3/3)^2$

۴ــ هر یک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.

۱) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2b$ (اتحاد مربع سه‌جمله‌ای)

۲) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

۳) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2 \quad (a\neq 0)$

۵ــ عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

۱) $2x^3+4x^2+8x$

۲) $3a^3b-12ab^3+a^3b^3$

۳) $a(x+1)+b(x+1)^2$

۴) x^2+6x+9

۵) $x^2y^2-4xy+4$

۶) $25x^4+30x^3+9x^3$

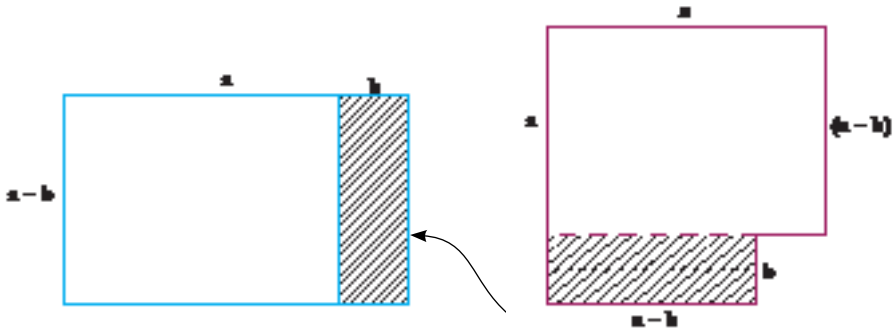
۷) a^3-2a^2+a

فعالیت

دو عدد مثبت a و b را با شرط b<a درنظر بگیرید. با دو روش متفاوت زیر، حاصل عبارت $(a+b)(a-b)$ را محاسبه کنید.

روش اول : با استفاده از ضرب کردن عبارت‌های جبری؛

روش دوم : مساحت شکل (۱) را به‌دست آورید.



شکل (۲) شکل (۱)

قسمت هاشورخورده از شکل (۱) را برداشته و به سمت راست آن اضافه می‌کنیم. شکل(۲) حاصل خواهد شد. مساحت شکل (۲) را به‌دست آورید. از تساوی مساحت این دو شکل، چه اتحادی حاصل خواهد شد؟ این اتحاد را با عبارت روش اول مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اتحاد مزدوج	$(a+b)(a-b) = a^{۲}-b^{۲}$

این اتحاد را به‌صورت کلامی بیان کنید.

کار در کلاس

با استفاده از اتحاد مزدوج، در قسمت‌های نقطه‌چین عبارت‌های مناسب بگذارید.

$(۱+a)(۱-a)=۱-\cdots$

$(۲a+۵)(۲a-۵)=\cdots-۲۵$

$(t+\cdots)(t-\cdots)=t^{۲}-۹$

کار در کلاس

حاصل کدام‌یک از عبارات زیر را می‌توان با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورد؟ سپس حاصل آن را بیابید.

$(x+۲)(x-۲)$ ؛ $(۷-x)(-x-۷)$

$(۱۰x-y)(y-۱۰x)$ ؛ $(-a+۱)(-a-۱)$ ؛

از اتحادها، در تجزیه عبارت‌های جبری استفاده می‌شود.

مثال : $a^۲-۹=(a-۳)(a+۳)$

$-۶b^۲+۴a^۲=۴a^۲-۶b^۲=(۲a)^۲-(\sqrt{۶}\,b)^۲=(۲a-\sqrt{۶}\,b)(۲a+\sqrt{۶}\,b)$

فعالیت

حامد از وحید که هر دو دانش‌آموز پایه نهم و برادر هستند، پرسید : که تجزیه عبارت‌های چندجمله‌ای به کمک اتحاد مزدوج را چگونه تشخیص دهم. وحید به دو نکته اساسی اشاره کرد :

اول اینکه جملات چند جمله‌ای‌های داده شده، نباید هم علامت باشند و دوم اینکه باید بتوان آنها را به‌صورت مربع کامل نوشت. به‌عنوان نمونه، درنظر بگیرید :

$$-۹y^۴+۴x^۲=۴x^۲-۹y^۴=(۲x)^۲-(۳y^۲)^۲$$
$$=(۲x-۳y)(۲x+۳y)$$

وحید در ادامه مثال دیگری برای حامد نوشت :

$$-۲۵a^۲+\frac{۱}{۴}b^۲$$

و از حامد خواست که آن را تجزیه کند. به نظر شما، حامد چگونه این عبارت را تجزیه می‌کند؟ جواب تجزیه را بنویسید.

حامد از برادرش خواست که یک مثال دیگر را نیز بنویسد. وحید این مثال را نوشت :

$$(x+۱)^۲-۶۴z^۴$$

حامد خیلی سریع، آن را تجزیه کرد. آیا شما نیز می‌توانید تجزیه را مانند حامد، به‌دست آورید.

کار در کلاس

۱ــ محسن دانش‌آموز پایه نهم است و قصد دارد که عبارت جبری زیر را ساده کند :

$(۲x-۷+۳y)(۲x+۷-۳y)$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری، بلافاصله به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و عبارت فوق را به کمک این اتحاد، به‌صورت زیر ساده می‌کند :

$۴x^۲-(۷-۳y)^۲$

به‌نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، a و b را چگونه انتخاب کرده است؟

استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به‌ظاهر مشکل را به راحتی امکان‌پذیر نماید.

۲ــ به کمک اتحادها، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$۹۸\times۱۰۲=(۱۰۰-۲)\times(۱۰۰-۲) = \cdots =$

$۴۹۷ \times ۵۰۳ = \cdots \times \cdots =$

فعالیت

۱ــ فرض کنید a و b دو عدد دلخواه باشند. با استفاده از حاصل‌ضرب عبارت‌های جبری، عبارت زیر را ساده کنید :

$(x+a)(x+b)=x^۲+\cdots$

چه اتحادی به‌دست خواهید آورد؟

اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b)= x^۲+(a+b)x+ab$

۲ــ معلم کلاس نهم، عبارت جبری $x^۲+۶x+۸$ را روی تخته نوشت و از دانش‌آموزان خواست که به کمک اتحاد جمله مشترک، آن را تجزیه کنند. سپس ۴ نفر از دانش‌آموزان را پای تخته آورد تا تجزیه به‌دست آمده را بنویسند.

جواب فاطمه : $(x+۱)(x+۵)$

جواب محدثه : $(x+۴)(x+۲)$

جواب نفیسه : $(x+۸)(x+۱)$

جواب حمیده : $(x-۲)(x-۴)$

کدام‌یک از این ۴ دانش‌آموز، جواب صحیح را نوشته است؟

آیا می‌توانید دلیل تجزیه نوشته شده توسط هر کدام را حدس بزنید؟ اگر معلم عبارت‌های جبری زیر را می‌داد، آیا با هیچ کدام از تجزیه‌های نوشته شده، برابر بود؟

$x^{۲}+۶x+۵$

$x^{۲}-۶x+۸$ و $x^{۲}+۹x+۸$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^{۳}$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل‌ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$(a+b)^{۳}=(a+b)^{۲}(a+b)=\cdots$

اگر همین سؤال را برای ساده‌کردن عبارت جبری $(a+b)^{۴}$ بپرسیم، چگونه عمل خواهید کرد؟ این سؤال را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز پرسید؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل‌ضرب، جواب نهایی را به‌دست آورد؟ فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست :

فعالیت

$(a+b)^{۰}=۱$

$(a+b)^{۱}=۱a+۱b$

$(a+b)^{۲}=۱a^{۲}+۲ab+۱b^{۲}$

$(a+b)^{۳}=۱a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+۱b^{۳}$

$(a+b)^{۴}=\cdots$

$\vdots$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

$\vdots$

مثلث خیام

۱ــ در شکل سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و پنجم وجود دارد؟ آیا می‌توانید سطرهای هشتم و نهم را کامل کنید؟

۲ــ چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و سطرهای عبارت‌های سمت راست وجود دارد؟ آیا می‌توانید براساس این ارتباط، $(a+b)^4$ را ساده کنید؟ آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب جملات عبارت‌های سمت راست آن وجود دارد؟

۳ــ چه الگوهای دیگری می‌توان از اعداد واقع در مثلث خیام به‌دست آورد؟

کار در کلاس

۱ــ با توجه به اتحادهایی که تاکنون یادگرفته‌اید، اتحادهای زیر را، با استفاده از حاصل‌ضرب عبارت‌های جبری بررسی کرده و تساوی دو طرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

۲ــ با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$8y^3-1=(2y)^3-(1)^3=(2y-1)((2y)^2+(2y)+(1)^2)$$
$$=(2y-1)(\cdots+\cdots+\cdots)$$
$$8x^3+1=(2x)^3+(1)^3=(\cdots+\cdots)(\cdots-\cdots+\cdots)$$
$$\ldots+b^3=(2a)^3+b^3=(2a+\ldots)(\ldots-2ab+\ldots)$$
$$t^6-\frac{1}{8}=(t^2)^3-(\frac{1}{2})^3=(\cdots-\cdots)(\cdots+\cdots+\cdots)$$

تمرین

۱ــ با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$(a+2)(a+3)$ ؛ $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$ ؛ $(\frac{1}{4}-x)(\frac{1}{4}+x)$

$(5x+4)(5x+3)$

۲ــ با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت‌های مناسب بگذارید.

$(xy-z)(xy+z)=\cdots-z^{۲}$

$(\cdots+\sqrt{۵})(\cdots-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۴}y^{۲}-\cdots$

$(x+a)(x-b)=x^{۲}-\cdots+\cdots$

$x^{۳}+\cdots=(x+۲y)(x^{۲}-\cdots+۴y^{۲})$

۳ــ به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$a^{۲}-۸a+۱۵\ ;\ x^{۲}+x+\frac{۱}{۴}\ ;\ x^{۲}+۱۰x+۲۴$

$(۲a+b)^{۳}-(۲a-b)^{۳}\ ;\ x^{۶}-۱\ ;\ x^{۲}-۲x-۸$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها، به‌دست آورید.

$(t-۲)(t^{۲}+۲t+۴)\ ;(z+\frac{۱}{۳})(z^{۲}-\frac{۱}{۳}t+\frac{۱}{۹})$

$(a+۳)(a^{۲}-۳a+۹)\ ;\ (a-۱)^{۳}\ ;\ (a-۱)^{۳}\ ;\ (۱+۲x)^{۳}$

$(a-b)^{۳}$

۵ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر، نشان دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای و یا اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای است؟

$(۳x+۵)(۹x^{۲}-۲۰x+۱۵)\ ;$

$(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)\ ;$

$(۴x+y)(۱۶x^{۲}+۴xy+y^{۲})\ ;$

$(۷x-۲)(۴۹x^{۲}+۱۴x+۴)\ ;$

۶ــ اتحاد جمله مشترک را به کمک مساحت اشکال منظم، همانند اتحاد مزدوج که در درس ارائه گردید، به‌دست آورید.

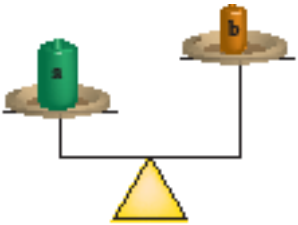
توضیح در مورد مثلث خیام [۱]

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت بپردازیم. همه ما می‌دانیم که صورت بسط یافته معادله دوجمله‌ای به‌طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتن ــ پاسکال نامیده می‌شد. در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از

خود پرسیدند آیا ممکن است این روش بسط دو جمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به‌وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد، نخستین بررسی‌ها به‌حضور این بسط در کتاب مفتاح‌الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع‌الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردپای این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدوداً شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱۳۸۹، تهران انتشارات آفتاب، علی‌اکبر ولایتی، حکیم عمر خیام، [۱]

فعالیت

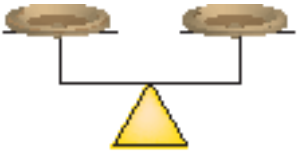


روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد.

با توجه به شکل، وزنه a سنگین‌تر از b است.

ــ با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $\neq$، $>$، $<$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده کرده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$a \square b$ ، $a \square b$ ، $b \square a$



در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای p کیلوگرمی موجود باشد، به‌طوری که $a=b+p$، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $a>b$ $(b<a)$ در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p $(p>۰)$ وجود دارد به‌طوری که $a+p=b$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x=y+۴ \Rightarrow x>y$

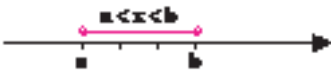
ب) $m+۱=n+۳$

ج) $a-۲=b+۳$

د) $۲m=۳n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های «a بزرگ‌تر از b» یا «a کوچک‌تر از b» یا «a برابر با b» را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a>۰$ یا $a=۰$ ، در این حالت می‌نویسیم $a\geq ۰$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر از ۰ یا برابر با ۰ است. مانند $۲\geq ۰$ یا $۰\geq ۰$ یا $\frac{۱}{۳}\geq ۰$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که a کمتر از b نباشد، در این صورت $a>b$ یا $a=b$ در این حالت می‌نویسیم $a\geq b$.



برای سه عدد حقیقی a و b و x، به‌طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد $(a<b)$، می‌نویسند؛ $a<x<b$.

مانند : $۱<۲<۵$

کار در کلاس

۱ــ مانند نمونه، متناظر با هر مجموعه یک نابرابری بنویسید.

الف) $\{۱,۲,۳,۴\}$; $x\leq ۴$ $(x\in\mathbb{N})$

ب) $\{۷,۸,۹,۱۰,...\}$

ج) $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

د) =

۲ــ علامت‌های عددهای حقیقی a , b , c را مانند نمونه طوری تعیین کنید که نابرابری‌ها برقرار باشند.

الف) $ab>۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول}: a>۰\ ,\ b>۰ \\ \text{حالت دوم}: a<۰\ ,\ b<۰ \end{cases}$

ب) $a^۲b>۰$

ج) $a^۳b^۲<۰$

د) $\frac{ab}{c}\geq ۰$

فعالیت

۱ــ به‌دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$+۳-\sqrt{۲}\downarrow -۳<۱$ $\qquad -\sqrt{۳}\downarrow -۳<۱$ $\qquad +۰\downarrow -۳<۱$ $\qquad +۳\downarrow -۳<۱$

$-۳+۳<۱+۳$

$\downarrow$

$۰<۴$

خاصیت ۱ : اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری برقرار است، یعنی اگر $a>b$ آنگاه $a+c>b+c$.

۲ــ دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید، آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$\times(۳-۳\sqrt{۳})\downarrow \frac{-۷}{۳}>-۴$ $\qquad \times۰\downarrow \frac{-۷}{۳}>-۴$ $\qquad \times(-۳)\downarrow \frac{-۷}{۳}>-۴$ $\qquad \times۳\downarrow \frac{-۷}{۳}>-۴$

$\frac{-۷}{۳}\times۳>-۴\times۳$

$\downarrow$

$-۷>-۱۲$

خاصیت ۲ : اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری برقرار خواهد بود، یعنی اگر $a>b$ و $c>0$ آنگاه $ac>bc$.

خاصیت ۳ : اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد منفی c($c<0$) ضرب کنیم، در این‌صورت داریم $ac<bc$.

۳ــ نابرابری $2x+1>7$ را درنظر بگیرید. این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x برابر با ۱ می‌باشد، در این صورت به این نابرابری، نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول می‌گوییم.

در جدول زیر مقادیر داده شده را به‌جای x قرار دهید، آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1>7$	$2(-1)+1>7$ ↓ $-1>7$ نادرست				

مجموعه مقادیری که به‌ازای آنها، نامعادله تبدیل به نابرابری درست شود، مجموعهٔ جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

ــ دو طرف نامعادله را با ۱− جمع کنید.

ــ دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

ــ با توجه به نابرابری $x>3$ متوجه می‌شویم که مجموعه همه اعداد بزرگ‌تر از ۳ مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D=\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$ می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور اعداد حقیقی به‌صورت مقابل نمایش داد.

کار در کلاس

۱ــ مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $2x+7\geq 15$

ب) $\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲}<\frac{x-۱}{۶}\xrightarrow{\times ۶}۶\times\frac{x}{۳}-۶\times\frac{۱}{۲}<۶\times\frac{x-۱}{۶}$

$\rightarrow ۲x-۳<x-۱\xrightarrow{+(-x)}۲x-۳+(-x)<x-۱+(-x)$

$\rightarrow x-۳<-۱\xrightarrow{+۳}x<۲ \qquad D=\{x\in\mathbb{R}|x>۲\}$

ج) $۳(x-۱)\geq ۲x+۱$

د) $\frac{۲}{۳}(x+۷)-\frac{x}{۴}\leq\frac{۱}{۲}(۳-x)+\frac{x}{۶}$

تمرین

۱ــ در جاهای خالی نمادهای > یا < را جایگزین کنید.

الف) $a-b=۱$ در این‌صورت $a\square b$.

ب) اگر $u-v=-۲$ در این صورت $u\square v$.

ج) اگر $۲(p-۱)=۲q-۳$ در این صورت $p\square q$.

د) اگر $\frac{a-b}{۲}=-۳$ در این صورت $a\square b$.

۲ــ علامت عددهای حقیقی c, b, a را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشند.

الف) $\frac{ac}{b}<۰$ ب) $\frac{a}{bc}>۰$ ج) $abc>۰$ د) $\frac{a^۲}{bc}<۰$

۳ــ مجموعهٔ جواب نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲(x-۳)+۵<۵-x$

ب) $۳-۲x\geq ۵(۳-۲x)$

ج) $\frac{y-۳}{۴}-۱>\frac{y}{۲}$

د) $-۲-\frac{q}{۴}\leq\frac{۱+q}{۳}$

۴ــ مجموعه‌های برابر را مانند نمونه به‌هم وصل کنید.

$\{x\in\mathbb{N}\mid ۵\geq x\}$	$\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$
$\{x\in\mathbb{Z}\mid ۰\leq x<۵\}$	$\{۱,۲,۳,۴,۵\}$
$\{x\in\mathbb{Z}\mid -۱\leq x\leq ۳\}$	$\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$
$\{x\in\mathbb{N}\mid -۲<x<۶\}$	