



عبارت‌های گویا

A large, empty, rounded rectangular box with a light beige background and a thin grey border, intended for writing or drawing.

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی متر بیشتر از عرض آن است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+۴$ می‌باشد و نسبت عرض به طول را می‌توان

با $\frac{x}{x+۴}$ نمایش داد. بنابراین

$$\frac{x}{x+۴} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲x + ۸ \Rightarrow x = ۸ \quad \text{طول} = ۱۲$$

عبارت $\frac{x}{x+۴}$ که نسبت دو چندجمله‌ای است را یک عبارت گویا می‌نامیم.

به طور کلی یک عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده است و سپس از همان

مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{۲v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که یک عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرارند:

$\frac{a+b}{۲}$	میانگین حسابی دو عدد نامنفی a و b	}	$\frac{v^2}{۲k}$	محاسبه جرم یک جسم با در دست داشتن سرعت و انرژی جنبشی
-----------------	--	---	------------------	---

همه عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{۲x-۵}{۵x^۳-۲x^۲+۱} \quad \text{و} \quad \frac{x+۵}{x-۱} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{۲}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{x-۳}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^۲-۳x+۱}{9xy}$$

$$\frac{۱}{x} \quad \text{و} \quad \frac{۱۰}{x+۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳x+\sqrt{۷}}{x^۲} \quad \text{و} \quad \frac{xy^۲}{(x-y)^۲} \quad \text{و} \quad \frac{x^۳}{۱} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b}$$

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$$

کار در کلاس

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

$$\frac{7}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3+x}}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای اعداد داده شده در جدول به دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای $x=3$ مخارج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید $\frac{1}{0}$ به عنوان یک عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را که به ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود را حذف کنیم. به عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است (چرا؟)

هر یک از عبارات‌های زیر به‌ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

الف) $\frac{x}{x^2-1}$

ب) $\frac{8x+5}{2}$

ج) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

ه) $\frac{7+x}{x}$

ساده کردن یک عبارت گویا :

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. در بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است

که دیگر قابل ساده شدن نیست. در حقیقت :

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن یک عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر ساده کرد، یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$(b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

$$(A \text{ و } B \text{ و } C \text{ چند جمله‌ای هستند و } C \neq 0 \text{ و } B \neq 0)$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارات‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (نحوه استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+3}{x+1}$

ج) $\frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$

د) $\frac{8ab^7}{20a^2b^3} = \frac{2b^4}{5a}$

ه) $\frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$

۱- عبارتهای گویای زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{m^2 - 16}{4 - m}$

ب) $\frac{6m + 18}{7m + 21}$

ج) $\frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$

د) $\frac{x^3 - y^3}{y - x}$

۲- عبارت $\frac{a + ax}{a}$ به دو شکل ساده شده است. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{a + ax}{a} = a + x$

ب) $\frac{a + ax}{a} = \frac{a(1 + x)}{a} = 1 + x$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است، به دست آورید.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y - 6)}$

ج) $\frac{2P}{P^2 - P - 12}$

د) $\frac{2x + 5}{x}$

ه) $\frac{x^2 - 1}{x + 5}$

و) $\frac{a + 3}{2a + 1}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3 - x}{x^2 - 5x + 6}$

ب) $\frac{4x^2 + 8x}{12x + 24}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2 - 6x}$

د) $\frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^3 + 1}$

ه) $\frac{1 - t^3}{t^2 - 1}$

و) $\frac{16x^2 - 9y^2}{8x - 6y}$

ز) $\frac{6a^4 b^2}{4ab^8}$

ح) $\frac{-2a - 8}{a^2 + 2a - 8}$

۳- عبارتهایی که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است را معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y}$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y}$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3}$

۴- هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

$\frac{a-2}{a+5}$	$\frac{a+2}{a-5}$	$\frac{a-2}{a-5}$	$\frac{a+2}{a+5}$	$\frac{2-a}{a+5}$
$\frac{-a-2}{-a-5}$	$\frac{-a-2}{5-a}$	$\frac{a-2}{-a-5}$	$\frac{2-a}{-a-5}$	$\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی را باید نوشت؟

الف) $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^3+z}$

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6}$

ج) $\frac{3x+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{})$

د) $\frac{x-5 \times (\boxed{})}{(x-2)(x-5)} = x+1$

۶- حاصل عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ با کدام یک از عبارتهای زیر برابر است و با کدام یک برابر نیست.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

د) $z \times \frac{x+y}{t}$

ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

و) $\frac{zx}{t} + y$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

عبارت های گویا را همانند اعداد گویا می توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد اعداد

گویا قوانین زیر را داریم :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$(b, d \neq 0)$$

$$(b, c, d \neq 0)$$

در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد می توان عبارت را ساده کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب ها و یا تقسیم های زیر چگونه انجام شده است. هر جا که لازم است حل را کامل کنید و حاصل عبارت را نیز ساده کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{5xy^3}{x^2z^2} \times \frac{6z^3}{5y^2} = \frac{2yz}{3x}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x+3)(x-6)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$$

$$\text{د)} \quad \frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^2} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^2}{8x} = \frac{y}{6}$$

$$\text{ه)} \quad \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2}$$

$$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+2)(a+1)} = \frac{a-5}{a+2}$$

الف) $\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4}$

ب) $\frac{a^3 + b^3}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2}$

ج) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3}$

جمع و تفریق عبارات‌های گویا

جمع و تفریق کسرهای گویا مشابه جمع و تفریق اعداد گویا است. در مورد اعداد گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$(b \neq 0)$

و

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$(b, d \neq 0)$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید و مانند نمونه یک جمع و تفریق مشابه آن ارائه کنید.

الف) $\frac{3x + 7}{x + 2} + \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 + 2x - 3}{x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

ب) $\frac{3x + 7}{x + 2} - \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 - (2x - 3)}{x + 2} = \frac{x + 10}{x + 2}$

----- = ----

ج) $\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} - \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{a^2 - 20 - (a - 2)^2}{a^2 - 4}$
 $= \frac{2a^2 - 4a - 16}{a^2 - 4} = \frac{2(a^2 - 2a - 8)}{a^2 - 4}$

----- =

$$= \frac{2(a - 4)(\quad)}{(a + 2)(a - 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

د) $\frac{8}{a(a + 3)} - \frac{4a}{(a + 3)(a - 2)} = \frac{8a - 4a^2}{a(a + 3)(a - 2)} = \frac{4a(\quad)}{a(a + 3)(a - 2)} = \frac{-4}{a + 3}$

----- =

$$\begin{aligned} \text{ه) } \frac{x^2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} &= \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} \\ &= \frac{2x^2 + xy + 3y}{3xy(x-y)^2} \end{aligned}$$

کار در کلاس

$$\text{الف) } \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$$

$$\text{ب) } \frac{6}{x} + \frac{4}{-x}$$

$$\text{ج) } \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x+4}{x+2}$$

$$\text{د) } \frac{7}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{x^2 + 4x + 3}$$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن یک عبارت گویای مرکب همانند کسره‌های گویا می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده کرد و سپس آنها را برهم تقسیم نمود و یا اینکه از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن یک کسر مرکب چه تفاوتی با روش دیگر دارد. هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

$$\text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \frac{\quad}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \text{—————} = \text{—————} = \text{—————}$$

$$\text{الف) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}\right)}{\left(\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}\right)} = \frac{2(a+1) - 3a}{2a - 3(a+1)} = \dots\dots$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} =$$

$$a \neq 0 \text{ و } a \neq -1$$

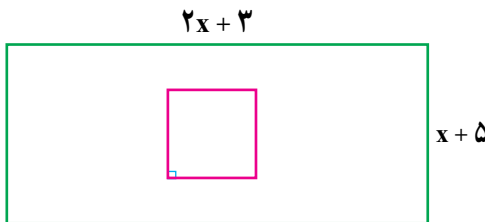
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

فعالیت



طول ضلع مربع نشان داده شده در داخل مستطیل نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{5}{26}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله پاسخ به دست می‌آید.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{\quad}$$

$$\text{مساحت مربع} = \frac{(\quad)^2}{\quad}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (\quad) (\quad) \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{5}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4(\quad)(2x+3)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

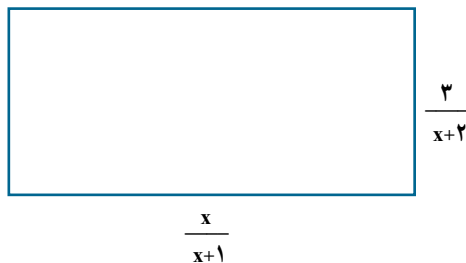
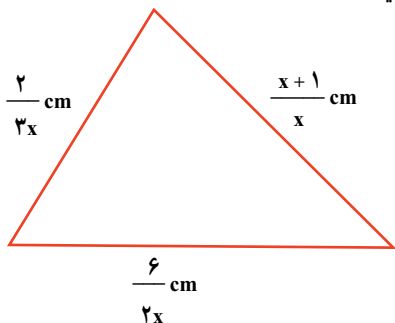
$$\Rightarrow 7x=35 \Rightarrow x=5$$

طول =

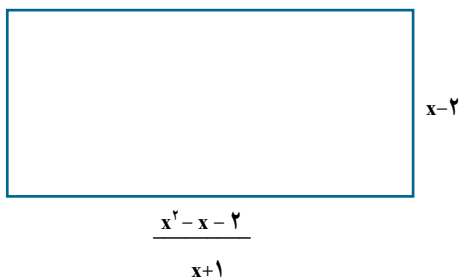
عرض =

کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را به دست آورید و آن را ساده کنید.



۲- مساحت مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.



تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ب) $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{7-m}{m^2-1}$

$$\text{ج) } \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18}$$

$$\text{د) } \frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2}$$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$$

$$\text{ب) } \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$\text{د) } \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$$

۳- فقط یکی از عبارات‌های گویای زیر قابل ساده شدن است. آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2-5a}{a}$$

۴- از میان عبارات‌های زیر هر کدام که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است را معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب) } \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج) } \frac{3x}{3y} \quad \text{د) } \frac{x^3}{y^3} \quad \text{ه) } \frac{a^3x}{a^2y}$$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارات‌های زیر برابر است؟

$$\text{الف) } -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب) } -\frac{x-3}{x+5} \quad \text{ج) } \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د) } -\frac{3-x}{x+5}$$

۶- کدام یک درست ساده شده است؟

$$\text{الف) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

۸- کدام یک درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید.

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ (ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$ ($x \neq 0$)

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$ د) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ اگر $a \neq b$

هـ) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$ هـ) ساده شده $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ برابر $a+b$ است.

و) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$ (و) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.
۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a}$

ب) $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

ج) $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که حاصل آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

مساحت مستطیل x^2-9 است.

$A = x^2 - 9$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

– برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^2}{27x^6z} = \frac{-2a^2z}{x^4} \quad \text{مثال:}$$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیرصفر باشد داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3 - 18x + 2$ بر 6 به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید و حل را تکمیل نمایید.

الف) $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{1}{2}a^2 + \dots - \frac{2}{a}$

ب) $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$
 $= \frac{7x}{y} - \frac{3}{y} + 3z$

ج) $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2}$
 $= \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \dots$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-21a^4b^4c}{28ab^6}$

ب) $\frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z}$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

مثال: چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله‌ای $x - 5$ تقسیم کنید.

اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 8 \\ 24 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقیمانده می‌نامیم. رابطه تقسیم نیز چنین است.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 3 \times 8 + 2 = 26 \end{cases}$$

به همین ترتیب چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و $x - 5$ را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را برحسب توان‌های نزولی متغیر موجود (در اینجا x) مرتب کرد. در مثال ما چندجمله‌ای‌های موردنظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم یعنی: $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل ضرب $2x$ در $x - 5$ را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = +3x - 15$$

برای سهولت می‌توانیم پس از محاسبه ضرب $2x$ در $x - 5$ ، در کادر بالا علامت عبارت حاصل

را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم یعنی:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\ \hline 3x - 15 \end{array}$$

اکنون شبیه یک تقسیم معمولی دوباره $3x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم می‌کنیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم. یعنی اولین جمله عبارت $3x - 15$ را بر اولین جمله $x - 5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که

$$\frac{3x}{x} = 3 \quad \text{داریم:}$$

این تقسیمات را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم کمتر شود.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x + 3 \\ \hline 3x - 15 \\ + 3x - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

تقسیم مورد نظر کامل شده است.

وقتی باقیمانده صفر باشد می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر کنید و حل را کامل کنید.

الف)
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\ + 4x^3 \quad \quad + 8x \quad \quad \square - 3 \\ \hline -3x^2 + 9x + 7 \\ - 3x^2 + \quad \square \\ \hline \quad \quad \square + 1 \end{array}$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

ب)
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\ + x^2 - 8x \quad \quad \square + \square \\ \hline 3x - 24 \\ + 3x - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r}
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\
 \underline{10x^4 - 3x^2 + 2x - 19} \quad | \quad 2x^2 - 3 \\
 +10x^4 - 15x^2 \quad | \quad 5x^2 + \square \\
 \hline
 12x^2 + 2x - 19 \\
 +12x^2 - 18 \\
 \hline
 2x - \square
 \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$$\begin{aligned}
 & (5x^2 + \square)(2x^2 - 3) + 2x - \square \\
 & = \dots\dots\dots \\
 & = 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19
 \end{aligned}$$

و نیز درجه چند جمله‌ای $2x - \square$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب) $-x^3 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

تمرین

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^4}{18xz^5}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2}$

ج) $(x^2 - 27) \div x - 2$

د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (+3y - 4)$

ه) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن

روابط تقسیم نشان دهید.

$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای $a + x + 10x^2 + 23x^3 + 20x^4$ بر $3x+4$ بخشپذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- باقیمانده تقسیم عبارت $9x^2 - 9x + 2$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر برابر صفر است.

$3x+2$ و $3x-2$ و $3-x$ و $3+x$